О МЕРНОЈ НЕСИГУРНОСТИ

Драган Станковић, Електротехнички факултет у Београду

Садржај *Овај рад има за циљ да на кратак и приступачан начин прикаже суштину књиге* ***Guide to Expression of Uncertainty in Measurement*** *која данас представља међународну референцу за изражавање несигурности експерименталних мерних резултата. При практичном коришћењу поменуте књиге, код већине читалаца постоје проблеми услед тежине текста, за чије је потпуно разумевање порeбан високи ниво познавања теорије грешака и анализе случајних процеса. Овај рад је предвиђен да представља окосницу будућег уџбеничког штива из ове области на редовним (додипломским) курсевима из области мерне технике. У раду се користи математички апарат типичан за додипломске студије техничких факултета. За потпунија објашњења и доказе читаоци се упућују на специјализовану уџбеничку литературу. Већи број примера из области електротехнике требало би да олакша разумевање суштине материје.*

1. УВОД

Обрада резултата мерења заснива се на *теорији грешака* која се као математичка дисциплина развила током 19. и почетком 20. века. Анализом измерених података, на основу ове теорије одређивана је вредност мерене величине и процењиване одговарајуће грешке, односно мерне несигурности. У основне појмове теорије грешака спадају *случајне* и *систематске грешке.* Подела грешака на ове две групе извршена је на бази разматрања **физичких узрока** који проузрокују грешке. При томе су усвојене идеализоване претпоставке које у практичним мерењима, по правилу, не могу бити испуњене. На пример, није могућно одредити које од величина окружења проузрокују само случајне а које само систематске грешке.

Практична примена теорије грешака у обради експерименталних резултата није била довољно уједначена, па је било тешко упоређивање резултата истоветних и сродних мерења презентираних од различитих институција и појединаца. Потреба за уједначавањем изражавања резултата на међународном плану, уочиле су све водеће институције из области метрологије и стандардизације. У циљу решавања проблема, *Међународни комитет за тегове и мере*, који представља орган *Генералне конференције за тегове и мере,* а сачињавају га експерти из разних области мерења, формирао је 1978. године *Радну групу за изражавања експерименталне несигурности.* Ова радна група је 1980. године донела је кратки документ *Препорука за изражавање експерименталне несигурности* где су дате смернице помоћу којих треба постићи уједначени и практично оријентисани начин обраде резултата мерења. Након дужег рада, године 1993. публикован је опширни текст *Упутство за изражавање мерне несигурности*, као заједнички документ водећих организација из метрологије, физике и хемије[1]. У упутству је дат нови приступ одређивања несигурности, потпуно задржавајући познати математички апарат класичне теорије грешака. Концепт одређивања мерне несигурности дат у Упутству није у супротности са теоријом грешака него даје приступ који је боље прилагођен условима реалних мерења.

Препорука садржи опширне теоријске основе и већи број практичних примера, почев од елементарних па до врло сложених који подразумевају од читаоца дубље познавање различитих математичких дисциплина. У тексту се наглашава да овим текстом ипак изражавање мерне несигурности није сведено на рутински поступак. Напротив, каже се да је ваљана процена несигурности могућна под условом да се што боље проуче све компоненте мерног поступка, почев од теоријских основа, остварености претпостављених услова, затим карактеристике мерне опреме и утицаја параметара окружења на мерни процес. Начини изражавања несигурности разликују од врсте мерења и не могу бити дати јединственим и коначним скупом прописа. То налаже неопходност креативног приступа проблемима изражавања несигурности. При томе особа која даје резултат мора располагати критичким размишљањем, интелектуалним интегритетом, поштењем и високим нивоом професионалних знања и вештина.

Наш први професор из области мерења, dr hc Владислав Јовановић (1897 – 1976), члан Саветодавног одбора за електрицитет при Међународном комитету за тегове и мере, имао је омиљену изреку која је у складу са горе изнесеним условима: "*у мерењима је најважнија честитост*".

---

[1] Међународни биро за тегове и мере,
Међународна електротехничка комисија,
Међународна организација за клиничку хемију,
Међународна организација за стандардизацију,
Међународна унија за чисту и примењену хемију,
Међународна организација за чисту и примењену физику и
Међународна организација за законску метрологију.

2. ОСНОВНИ ТЕРМИНИ ПРИ ИЗРАЖАВАЊУ МЕРНЕ НЕСИГУРНОСТИ (МН)

Сви термини и целокупни математички апарат познат из класичне теорије грешака користе се и у Упутству. Међутим појављују се неки нови термини.

Стандардна мерна несигурност, *u* (енгл. Uncertainty), једнака је стандардном одступању *s*, $u = s$. Статистичка сигурност која одговара стандардној МН зависи од расподеле која се приписује датом мерењу. На пример у случају Гаусове расподеле, интервалу ширине једног стандардног одступања, $x_s \pm u$, (x_s средња вредност), одговара сигурност од 68,2 % (видети члан 4.1.3).

Комбинована стандардна мерна несигурност, u_c, користи се када се резултат добија на основу већег броја прикупљених података. Претходно се за сваки податак који утиче на мерење одреди одговарајућа стандардна МН и на основу њих се, као резултанта, одређује комбинована МН, на начин који ће бити илустрован у наставку.

Проширена мерна несигурност, *U,* представља умножак стандардне МН и ***коефицијента проширења,*** *k,* који зависно од расподеле, има вредност у интервалу од $\sqrt{3}$ до 3. Проширеној МН одговара висока вредност статистичке сигурности, реда величине 99 %. Несигурност која се наводи у каталозима произвођача инструмената по правилу представља проширену МН, која се некада назива и *гарантоване карактеристике.*

3. ТИПОВИ МЕРНЕ НЕСИГУРНОСТИ

МН и грешке представљају различите појмове, па се не смеју изједначавати. Резултат може имати грешку (позитивног или негативног знака) која је дефинисана као разлика измереног податка и тачне, односно условно тачне вредности. МН је позитивна величина и приписује се целокупном мерном процесу, односно инструменту који се примењује. На пример, за неки термометар произвођач даје податак да мерна несигурност износи 1 °C. Ако је овим термометром очита температура, на пример 20,0 °C, може се очекивати да стварна вредност температуре припада опсегу од 19,0 °C до 21,0 °C. Ако се затим помоћу еталонског термометра установи да је тачна вредност била 20,1 °C, значи да је у овом случају грешка износила 0,1 °C. У следећем мерењу грешка ће вероватно имати неку другу вредност у распону $\pm 1\,^0\mathrm{C}$.

Постоје два основна типа несигурности: *тип А* и *Тип Б*. Ова подела је заснована искључиво **на основу метода** којима се несигурности одређују. У одређеним условима, о којима ће бити речи, користи се и тзв. *комбинована МН*.

3.1 МЕРНА НЕСИГУРНОСТ ТИП А

МН тип А одређује се методом **статистичке обраде резултата.** Из овог следи да МН тип А постоји искључиво ако се ради о мерењу које је више пута поновљено. Ако су резултати поновљених мерења представљени узорком $x_1, x_2, ..., x_i, ...x_n$, може се изачунати средња вредност $x_s = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$, и затим стандардно одступање појединих резултата

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i^n (x_i - x_s)^2}{n-1}}. \qquad (1)$$

Средња вредност x_s представља такође величину случајног карактера, па отуда има своје стандардно одступање s_{x_s}, које према теорији грешака износи[2]

$$s_{x_s} = \frac{s}{\sqrt{n}}. \qquad (2)$$

МН тип А, (која се такође назива и *експериментално стандардно одступање*) једнака је одговарајућем стандардном одступању. Тј. појединим резултатима x_i одговара МН тип А $u = s$, док је МН тип А средње вредности $u_s = s_{x_s}$.

Статистичка сигурност која одговара МН тип А зависи од статистичке расподеле која се може усвојити у датом случају. Ако се ради о релативно великим узорцима теоријски се може показати **средња вредност има Гаусову расподелу** (одговарајући доказ даје тзв. *централна гранична теорема*). При томе, елементи који сачињавају узорак, могу имати било коју од расподела (униформну, Гаусову и др.).

Стандардно одступање представља такође случајну величину, што значи да и оно такође има своје стандардно одступање s_s које зависи од броја елемената n. Ако је заступљена Гаусова расподела, из теорије се добија

$$s_s = \frac{s}{\sqrt{2(n-1)}}, \qquad (1.a)$$

Израз (1.а) показује да s_s има вредност која споро опада са порастом броја *n.* Ако узорак има мањи број елемената, на пример $n = 8$, релативна несигурност стандардног одступања s_s / s има знатну вредност од

[2] Видети, на пример ФТМ, члан 1.3.

27 %. То указује да резултати добијени статистичком анализом малог броја података имају лошу поузданост.

3.2 МЕРНА НЕСИГУРНОСТ ТИП Б

МН тип Б одређује се **свим осталим** методама, изузев статистичке анализе серије поновљених мерења. То претпоставља употребу свих расположивих података и сазнања о коришћеној мерној опреми, о утицају параметара окружења на мерење, о разним врстама сметњи и др. При томе се претпоставља да је експериментатор искусан као и да има довољно теоријских знања.

Важан извор података за одређивање МН тип Б су каталози које произвођач даје уз инструмент. Ту се обично даје несигурности мерења у зависности од мерног опсега, при контролисаним вредностима параметара околине, као што су опсег температуре околине, релативне влажности и др.

Сви инструменти у јавној употреби, по закону, треба да буду претходно прегледани помоћу опреме вишег нивоа тачности, у лабораторијама са одговарајућим овлашћењем. У тој лабораторији се, по потреби, коригује нула инструмента и осетљивост, чиме се систематске грешке отклањају у највећој могућој мери. Наравно, преглед има законску важност само у означеном временском периоду, након чега се преглед понавља. Подаци у сертификату добијеном након прегледа, заједно са евентуалним додатним обавештењима стручњака који су преглед извршили, представљају корисне изворе у одређивању МН тип Б.

Анализом експеримента треба установити да ли резултат мерења заиста представља бројну вредност физичке величине чије се мерење врши. На пример, ако се мери отпорност неког високоомског отпорника, треба установити да ли паралелне шентирајуће везе имају утицај мерни резултат. Осим тога, треба испитати да ли снага која се развија у отпорнику изазива нежељени пораст температуре у односу на околину. Треба водити рачуна о температури околине, влажности и атмосферском притиску, ако се оцени да могу имати утицај на резултате. Познато је да да већина лабораторијских мерења има статички карактер. То значи да се очитавање обавља када се успостави стационарно стање. Међутим, потпуна устаљеност физичких величина није остварива у пракси. Током прикупљања података мерена величина и параметри околине имају одређену брзину промене, па се јављају одређене *динамичке грешке мерења*. Ако се коришћени инструменти налазе при крају временског периода периодичног прегледа, или ако су коришћени у тешким условима, треба проценити да ли је дошло до промене карактеристика опреме. Предмет посебне анализе треба да буде утицај заокруживања бројева при рачунским операцијама током израчунавању резултата, затим утицаја резолуције мерних инструмената, ваљаности алгоритама коришћених у обради резултата и др.

3.3 КОМБИНОВАНА МЕРНА НЕСИГУРНОСТ

Мерења неких величина имају сложени карактер, тј. базирају се на резултатима неких претходних мерења. Њима се добијају полазни резултати помоћу којих се долази до крајњег мерног резултата. На пример, снага P која се развија у отпорнику може се одредити ако се претходно измери струја I и напон U, а затим снага израчуна изразом $P = U \cdot I$. У оба претходна мерења одређује се мерна несигурност, и то за струју u_I и за напон u_U. На основу ове две несигурности одређује се несигурност снаге u_P као резултантна вредност која се назива *комбинована мерна несигурност*. Начин одређивања комбиноване МН зависи од тога да ли полазне величине имају одређени степен међузависности (корелисаности) што се изражава коефицијентом корелације r . У наставку биће дати неки једноставни примери одређивања комбиноване МН.

4. МЕРНА НЕСИГУРНОСТ И ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ

Једна од основних поставки у методици датој у Приручнику је да се сваком податку о МН обавезно **придружи нека функција расподеле** као и вероватноћа која одговара том податку. У погледу придруживања расподеле постоји јасна разлика концепта МН у поређењу са класичном теоријом грешака. У класичној теорији, функција расподеле се користе **само** у анализи случајних грешака. Систематске грешке се у тој теорији посматрају као детерминистичке величине, тј. као величине које немају случајни карактер него имају константну вредност у посматраном мерењу.

Концепт у Приручнику заснива се на становишту да **све врсте** МН имају случајни карактер, што значи да свакој од њих треба **обавезно** придружити одговарајућу функцију расподеле.

МН тип А се одређује када се располаже низом од n међусобно различитих резултата поновљених мерења. Ако је број n довољно велик, средња вредност и њено стандардно одступање испуњавају услове централне граничне теореме. Отуда следи да МН средње вредности, тип А, има по правилу **Гаусову расподелу**. При томе расподела полазних резултата не мора бити Гаусова.

МН тип Б проузрокују систематски ефекати који се **не могу** у потпуности отклонити поступком калибрације. Као одговарајући пример посматра се елиминисање систематске грешке волтметра услед поремећаја “нуле”. Испитивани волтметар, са улазним крајевима у кратком споју, на пример, показује напон од + 200 μV. Пошто би рад са оваквим волтметром давао резултате који су систематски померени за приближно толики напон, пре почетка рада приступа се поступку "нуловања". Са кратко спојеним крајевима, помоћу одвијача показивање на скали се постепено смањује до нулте вредности (код новијих дигиталних волтметра то се постиже притиском на тастер "нула"). Након овог поступка може се уочити да на индикатору ипак долази до показивања мањег напонског сигнала промењљивог знака од неколико μV. То је тзв. краткотрајна нестабилност нуле. Ако би се посматрање продужило, уочило би се додатно спорије "шетање" (drift) нуле. Дакле систематска грешка не може се у потпуности отклонити. Преостали систематски ефекати имају **имају случајни карактер**, па је отуда неопходно да се такође и несигурности тип Б придружи одговарајућа функција расподеле. Случајни карактер МН тип Б илуструје се такође и следећим примерима.

***Пример* 1**

На скали дигиталног инструмента идеално добре тачности очитава се бројна вредност мерене величине представљена бројем од N поделака. Стварна вредност при томе има неку аналогну вредност која се са **подједнаком вероватноћом** може налазити у интервалу између N – ½ до N + ½ поделака. У овом случају дигитално очитавање, само по себи, уноси МН (проширену) од ½ подеока, којој одговара равномерна расподела, видети члан 4.1.1.

***Пример* 2**

При мерењу једносмерног напона на скали једног **реалног** дигиталног волтметра очитава се вредност U = 1,000000 V. У каталогу произвођача се гарантује да том опсегу максимална несигурност износи 30 μV. Стварна вредност напона је случајна величина која се налази у опсегу 0,999970 V до 1,000030 V. Одговор коју од расподела треба приписати овом резултату треба потражити или а) у каталогу произвођача, б) од калибрационе лабораторије или в) сопственим искуством. У овом случају није неопходно узимати у обзир знатно мању несигурност услед дигиталног очитавања која износи ½ подеока, што је објашњено у претходном пасусу.

4.1 ТИПИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ РАСПОДЕЛЕ ПРИ ОДРЕЂИВАЊУ МЕРНЕ НЕСИГУРНОСТИ

При изражавању МН користе се начешће три функције расподеле: *равномерна* (униформна), *троугаона* и *Гаусова*. Као компромис између равномерне униформне и троугаоне расподеле некада се користи *трапезна расподела*.

4.1.1 Равномерна расподела

Дијаграм симетричне равномерне расподеле приказан је на сл.1. Расподела је одређена средњом вредношћу μ и полуширином интервала a. Вредност случајне промењљиве x могу да се налазе у опсегу $x \in (\mu - a, \mu + a)$, при чему је свака вредност у интервалу подједнако вероватна. Свака расподеле мора да испуњава услов нормираности, што значи да површина испод криве расподеле износи 1. Математички је овај услов изражен изразом $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{p}(x)\mathrm{d}x = 1$, где је $\mathrm{p}(x)$ функција расподеле. Из услова нормираности и из слике 1 добија се

$$\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2a}, \qquad x_1 < x < x_2 \tag{3}$$

$$\mathrm{p}(x) = 0 \qquad \text{свуда другде}$$

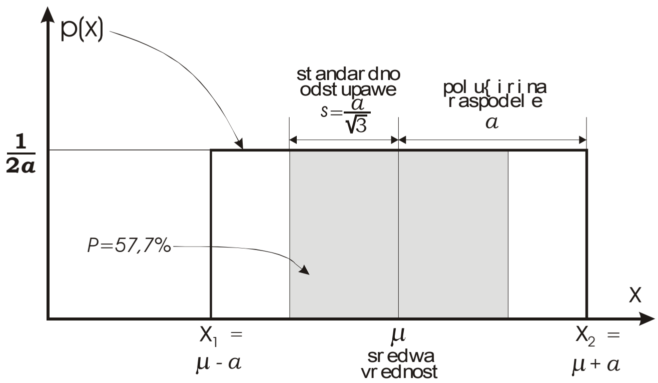
Стандардно одступање, као корен средње вредности квадрата одступања, добија се изразом

$$s = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{p}(x)(x-\mu)^2\,\mathrm{d}x} \tag{4}$$

Заменом (3) у (4) добија се стандардно одступање s_r равномерне расподеле, које је једнако стандардној несигурности

$$u_\mathrm{r} = s_\mathrm{r} = \frac{a}{\sqrt{3}} \tag{5}$$

Интервал полуширине једног стандардног одступања са центром у средњој вредности приказан је осенченом површином на сл.1. Ова површина која представља вероватноћу налажења резултата у интервалу полуширине од једне стандардне несигурности око средње вредности износи $1/\sqrt{3} = 57,7\%$.



Сл.1. Равномерна (униформна) симетрична расподела

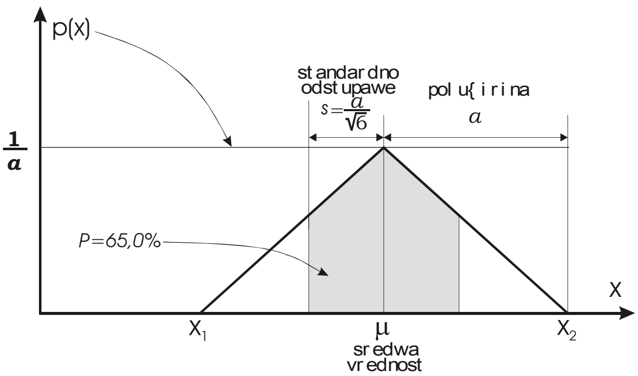
Униформна расподела се најчешће примењује када се располаже са мало информација о неком инструменту. На пример, из произвођачког проспекта се прочита податак да инструмент има гарантовану грешку мању од 1,5 % максималне вредности U_m. Ако не постоји искуство или друго сазнање о евентуалном груписању резултата око средње вредности, може се претпоставити да резултати при некој вредности мерене величине имају униформну расподелу са полуширином $a = 0{,}015 \cdot U_\mathrm{m}$. Стандардна несигурност у овом случају износи $u_\mathrm{r} = a/\sqrt{3} = 0{,}0087 \cdot U_\mathrm{m}$.

Униформна расподела се користи при одређивању несигурности у случајевима међу којима су и следећи.

- У случају генерисања случајних бројева.
- Када се очитавање врши на скали дигиталног индикатора, (тада проширена несигурност износи **најмање** половину дигита).
- Таблични подаци о вредности параметра неког материјала (специфична отпорност, густина, модуо еластичности и сл.) налазе се у опсегу ($x_{\min}$, x_{max}). За средњу вредност се тада усваја $\mu = (x_{\min} + x_{\max})/2$, па је полуширина расподеле $a = x_{\max} - \mu = \mu - x_{\min}$.

4.1.2 Симетрична троугаона функција расподеле

Троугаона функција расподеле приказана је на сл.2. Троугаона и равномерна расподела имају заједничку одлику да им је интервал у којем се налазе резултати **ограничен**. Са сл. 2 види се да се сви резултати налазе у ограниченом интервалу



Сл.2 Симетрична троугаона расподела са полуширином а .

полуширине a симетрично око средње вредности μ. Основна карактеристика троугаоне расподеле је **сконцентрисаност** резултата око средње вредности. То значи да су мања одступања резултата од средње вредност вероватнија од већих одступања. Укупна површина троугла на сл.2 мора бити 1, што представља услов нормираности, одакле се добија да максимум расподеле износи $\mathrm{p}(\mu) = 1/a$, што је два пута више него код униформне расподеле исте ширине. Троугаона функција расподеле дефинисана је изразима

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{p}(x) = (x - x_1)/a^2, && x_1 \le x \le \mu \\
&\mathrm{p}(x) = (x_2 - x)/a^2, && \mu \le x \le x_2 \qquad (6)\\
&\mathrm{p}(x) = 0, && \text{свуда другде}
\end{aligned}
$$

Стандардно одступање код троугаоне расподеле, које такође представља стандардну несигурност, $s_{\mathrm{t}} = u_{\mathrm{t}}$, израчунава се заменом израза (6) у (4), чиме се добија

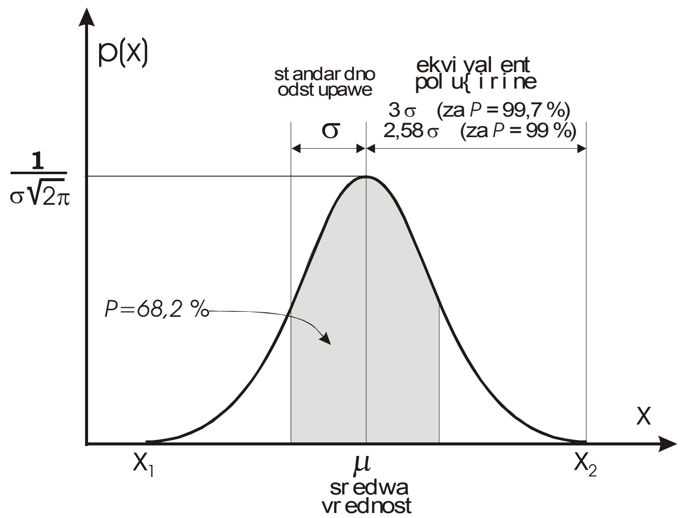
$$s_{\mathrm{t}} = u_{\mathrm{t}} = a/\sqrt{6} \qquad (7)$$

Површина испод функције расподеле, шрафирана на сл.2, полуширине од једне стандардне несигурности, износи 65%. Као последица сконцентрисаности око средње вредности, види се да троугаона расподела има већу вероватноћу налажења резултата у интервалу стандардне несигурности у поређењу са равномерном расподелом.

Троугаона расподела се примењује у случају када се из искуства зна да постоји јасно груписање мерних резултата око средње вредности. При томе услови централне граничне теореме[3] нису потпуно задовољени, што значи да расподела највероватније није Гаусова.

4.1.3 Гаусова (нормална) функција расподеле и Судентова расподела

Гаусова расподела, сл.3, има посебно велики значај у мерењима а такође и у физици уопште. Она се јавља увек када су испуњени услови наведени у тзв. централној граничној теореми. Математички израз



Сл.3 Гаусова (нормална) функција расподеле.

расподеле гласи

$$\mathrm{p}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in (-\infty, \infty), \qquad (8)$$

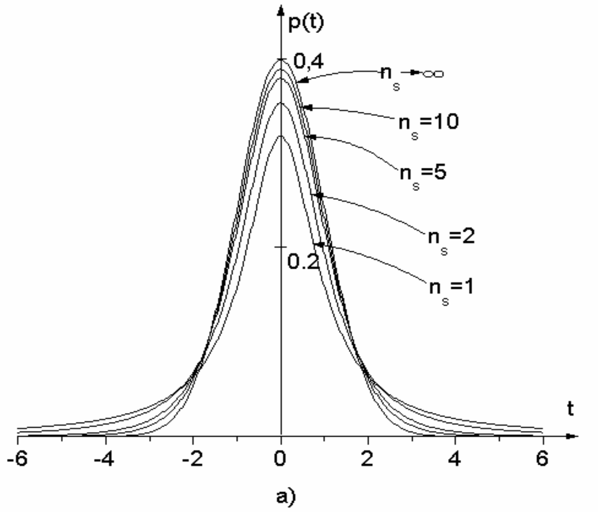
где μ и σ представљају средњу вредност, односно стандардно одступање. Крива расподеле је симетрична у односу на средњу вредност при којој има максимум који износи $\mathrm{p}(\mu) = 1/\sigma\sqrt{2\pi}$. Теоријски, Гаусова расподела је дефинисана у неограниченом опсегу променљиве x, насупрот равномерној и троугаоној расподели које су дефинисане у ограниченом интервалу. Међутим, у пракси Гаусова расподела се **ретко користи** ван интервала $(\mu \pm 3\sigma)$ коме одговара статистичка сигурност од 99,73%. У техници се ова сигурност сматра толико високом, да се резултати изван тог интервала тумаче последицом неке

[3] Видети на пример члан 1.11 ФТМ или стандардне уџбенике статистичке математике.

грубе грешке, па се као такви одбацују. Дакле, и Гаусова расподела се условно може сматрати ограниченом, при чему **еквивалентна полуширина** износи $a = 3\sigma$. У неким разматрањима сматра се да је статистичка сигурност од 99% довољно висока и да је оправдано очекивати да се сви мерни резултати нађу у одговарајућем интервалу. Одговарајућа еквивалентна полуширина износи $a = 2{,}56 \cdot \sigma$. Ово указује да при разматрању Гаусове расподеле могу користити две вредности коефицијент проширења: $k = 3$ или $k = 2{,}56$, зависно статистичке сигурности чију вредност треба увек навести.

Гаусова расподела је у поређењу са претходне две, најсконцентрисанија око средње вредности. Интервалу $\mu \pm \sigma$ одговара статистичка сигурност од 68,2 %, (осенчени део површине на сл.3) што је више у поређењу са сл.1 и сл.2.

Студентова расподела, примењује се када су испуњени уобичајени услови важења Гаусове расподеле, али је број мерења n *релативно мали*. На сл.4 приказано је неколико дијаграма Студентове расподеле[4] за различите вредности степена слободе $n_s = n - 1$. Студентова расподела је симетрична око средње вредности. У случају великих узорака, $n_s \to \infty$, Студентова расподела прелази у *нормализовану Гаусову* ($\mu = 0$, $s = 1$). Из сл. 4 се види да је стандардно одступање Студентове расподеле је увек **веће** него код Гаусове, док је максимум нижи.



Сл.4 Дијаграми Студентове расподеле за различите вредности степена слободе n_s

Значајније разлике Гаусове и Студентове расподеле могу се уочити када величина узорка постане мања од граничне вредности $n_{\min}$ која се креће у распону од 20 до 40 елемената. При томе $n_{\min} \approx 20$ се односи на случај када се МН изражава са *релативно малом вероватноћом*, на пример $P \leq 68{,}2\%$ док се вредност $n_{\min} \approx 40$ односи на случај када се МН изражава са *већом вероватноћом*, на пример $P \geq 99\,\%$.

У многим практичним експериментима број поновљених мерења често мали, па је у анализи несигурности неопходна примена Студентове расподеле. Овде се само наводе два правила.

За дату вероватноћу P, Студентова расподела даје утолико *шири интервал* несигурности од Гаусове утолико је број елемената мањи.

При датом броју резултата n, Студентова расподела даје утолико *шири интервал* несигурности од Гаусове уколико је вероватноћа са којом се изражава МН већа.

Илустрација ових правила дата је у оквиру примера 2 у члану 4.2.

4.2 УПОРЕЂИВАЊЕ ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ

При анализи мерне несигурности, деликатно питање представља избор ваљане врсте функције расподеле. Проблем избора расподеле се може успешно решити ако постоје могућности да се при сличним условима изврши већи број мерења и тиме добије пробни узорак података. Са овим подацима се црта хистограм и спроводи успитивање о томе која расподела најбоље одговара хистограму. Један од метода за одређивање погодне функције расподеле назива се Хи-квадрат тест[5]. Међутим, експериментално одређивање функције расподеле на овом принципу захтева много времена па се спроводи само када се ради о мерењима већег значаја. Основни критеријуми избора једне од три наведене функције расподеле су објашњени у члану 4.1. Утицај избора расподеле на вредност мерне несигурности илустрован је упоредним подацима из табеле 1, и помоћу следећа два једноставна примера.

Пример 1 Упоређивање функција расподеле

У таблицама карактеристика неког метала постоји податак да његов модуо еластичности има вредност у опсегу од $(2{,}0 \cdot 10^{11}$ до $2{,}2 \cdot 10^{11})$ N/m^2. Потребно је одредити стандардну несигурност овог податка.

Решење ће бити дато у три варијанте, при чему ће бити размотрене три горе поменуте симетричне расподеле. Средња вредност (у сви варијантама износи $\mu = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ N/m^2, а полуширина расподеле $a = 1 \cdot 10^{11}$ N/m^2, што истовремено представља и **проширену несигурност**.

а) *Униформну расподелу* треба усвојити када нема сазнања да су вредности око средине интервала вероватније од оних у близини граница интервала. Стандардна несигурност једнака је стандардном

[4] Детаљније информације на пр. у ФТМ, члан 1.14

[5] Видети ФТМ, члан 1.13

одступању, израз (5), и износи $u = a/\sqrt{3} = 0{,}577 \cdot 10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$.

б) *Троугаона расподела* се може усвојити ако аутори таблица или сопствена искуства упућују да су вредности ближе средине интервала вероватнија од вредности ближих крајевима Стандардна несигурност у овом случају дата је изразом (7), $u = a/\sqrt{6} = 0{,}408 \cdot 10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$.

в) *Гаусова расподела* се користи ако претходна детаљнија статистичка испитивања (хистограм, Хи- квадрат тест и сл.) указују на то. Ако се усвоји да еквивалентна "полуширина" расподеле одговара сигурности од 99 %, стандардна несигурност, према табели (1), има вредност $u = a/2{,}58 = 0{,}388 \cdot 10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$. Под претпоставком да "полуширини" одговара сигурност 99,7 %, стандардна несигурност износи $u = a/3 = 0{,}333 \cdot 10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$.

***<u>Пример 2</u>* Упоређивање функција расподеле**

У продавници је извршена провера масе 10 производа исте врсте, при чему су, помоћу дигиталне ваге са резолуцијом 1 g добијени подаци дати у табели 2. Потребно је одредити стандардну и

Табела 2 Масе производа

Р.број	1	2	3	4	5
Маса (kg)	1,002	0,995	1,000	1,008	1,005
Р.број	6	7	8	9	10
Маса (kg)	1,011	1,003	1,012	1,006	1,001

проширену несигурност масе производа. Не располаже се никаквим додатним подацима у вези мерне несигурности.

Средња вредност масе је $m_s = 1004{,}3$ g. Применом израза (1), за стандардну несигурност (Тип А) масе појединих производа добија се $u = s = 5{,}2$ g. У овом случају је оправдано занемаривање стандардне несигурности услед дигиталног очитавања, која износи $(0{,}5/\sqrt{3} = 0{,}29)$ g, видети пример 1 у члану 4 и израз (5). Из малог броја добијених резултата није могућно поуздано проценити која расподела је заступљена. Проширена несигурност U за случај три расподеле има следеће вредности.

Униформна расподела: $U = u\sqrt{3} = 9{,}0$ g;

Троугаона расподела: $U = u\sqrt{6} = 12{,}7$ g;

Гаусова расподела $U = u \cdot 2{,}58 = 13{,}4$ g, ($P = 99$ %), односно $U = u \cdot 3 = 15{,}6$ g, ($P = 99{,}7$ %).

Посматрани узорак је релативно мали, тако да је потребна корекција применом **Студентове расподеле.** Број степени слободе у овом случају износи $n_s = n - 1 = 9$. За ову вредност n_s и за вероватноћу $P = 99\%$ према подацима из таблице за несигурност се добија $U = u \cdot 3{,}25 = 16.9$ g. За вероватноћу $P = 99{,}73\%$ из таблице се добија $U = u \cdot 4{,}09 = 21{,}2$ g. Треба приметити да се МН одређена Студентовом расподелом значајно већа него код Гаусове расподеле.

Из табеле 1 и из горњих примера, уочава се велики утицај претпостављене расподеле на вредност података у вези мерне несигурности. Ако постоји потреба, да се поуздано утврди расподела, тада се приступа додатном испитивању неког већег узорка од, на пример, $n \approx 100$ производа. То омогућује цртање хистограма и затим примену тзв. Хи-квадрат теста[6] којим се потврђује ваљаност претпостављене функције расподеле. .

Упоређивањем података изнетих у таблице 1 као и из претходних примера, могу се извести следећи закључци.

- Равномерна расподела има најмању статистичку сигурност у интервалу $\mu \pm \sigma$ и најмањи кефицијент проширења.
- Код Гаусове расподела уочава се значајна разлика, зависно од тога о којој се статистичкој сигурности ради (99 % или 99,7 %) јер постоји осетна разлика одговарајућих коефицијената проширења (2,58, односно 3).
- Троугаона и Гаусова расподела ($P = 99\%$) имају блиске вредности коефицијента проширења односно стандардног одступања при истој еквивалентној полуширини.
- Стдентова расподела даје значајно проширење интервала несигурности када се ради са малим узорцима и високом вероватноћом податка о МН.

5. ОДРЕЂИВАЊЕ КОМБИНОВАНЕ МН

Комбинована МН и одговарајућа проширена МН, представља резултанту више различитих несигурности. Одређивање комбиноване МН, по правилу, представља крајњи циљ обраде података мерних података. Комбинована МН одређује се у следећим случајевима.

- Мерење се понавља n пута из чега резултира МН тип А. Из расположивих сазнања о експерименту одређена је такође и МН тип Б.
- Извршено је само једно мерење, па МН тип А не постоји. Анализом је установљено да две или више утицајних величина изазивају МН тип Б. На основу ових несигурности израчунава се комбинована МН.

[6] ФТМ, члан 1.15.

У горњем изразу Δx_i представљају систематске грешке утицајних величина x_i. Систематске грешке могу бити позитивне или негативне, али знак појединих грешака остаје увек исти при поновљеним мерењима. То значи да се систематске грешке у поновљеним мерењима могу сматрати међусобно корелисаним величинама.

Табела 1 Уз упоређивање три посматране функције расподеле

Расподела	Полуширина Расподеле	Стандардно Оступање	Статист.сигур. Унутар $\mu \pm \sigma$	Максимална висина	Коефицијент Проширења
Симетрична равномерна	a (P = 100 %)	0,577 $\cdot a$	57,7 %	$\frac{0{,}5}{a}$	1,73
Симетрична Троугаона	a (P = 100 %)	0,408 $\cdot a$	65,0 %	$\frac{1}{a}$	2,45
Гаусова	a Еквивалентна за P = 99 %	0,388 $\cdot a$	68,2 %	$\frac{1{,}03}{a}$	2,58
	a Еквивалентна за P = 99,7 %	0,333 $\cdot a$		$\frac{1{,}20}{a}$	3

5.1 КОМБИНОВАНА МН У СЛУЧАЈУ НЕКОРЕЛИСАНИХ ВЕЛИЧИНА

Две величине су некорелисане онда, када промене једне од њих, не изазивају предвидљиве промене друге величине. У теорији грешака разматра се проблем стандардног одступања индиректно мерених величина $y = f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n)$, где утицајне променљиве x_i имају случајне грешке. При томе се случајне грешке сматрају узајамно статистички независним, односно **некорелисаним величинама**. Стандардно одступање индиректно мерене величине дато је изразом[7]

$$s_y = \sqrt{\sum\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \cdot s_{x_i}^2\right]} \qquad (9)$$

где s_{x_i} представља стандардно одступање утицајне величине x_i. Комбинована МН величине $y = f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n)$ у случају некорелисаних утицајних величина x_i одређена је изразом који је аналоган са (9),

$$u_y = \sqrt{\sum\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u_{x_i}^2\right]} \qquad (10)$$

где је u_{x_i} МН тип Б утицајне величине x_i. Израз (10) важи искључиво када су утицајне величине x_i међусобно некорелисане. Као одговарајући пример, може се узети мерење густине ρ неког тела на бази мерења масе m и запремине V, користећи израз $\rho = m / V$. Маса и запремина мере се различитим мерилима (вага и мензура), чији је рад међусобно независан. При поновљеним мерењима, резултати мерења масе и запремине могу да варирају, али те промене нису у међусобној статистичкој вези. Отуда се код мерења густине, маса и запремина могу сматрати некорелисаним величинама.

Добар пример некорелисаних величина представљају МН тип А и МН тип Б код једног више пута поновљеног мерења, видети пример у члану 5.3.

5.2 КОМБИНОВАНА МН У СЛУЧАЈУ КОРЕЛИСАНИХ ВЕЛИЧИНА

У класичној теорији грешака разматрају се систематске грешке индиректно мерених величина које се могу изразити у облику $y = f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n)$. За систематску грешку величине y добија се израз[8]

$$\Delta y = \sum \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \, . \qquad (11)$$

МН тип Б индиректно мерене величине $y = f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n)$, за случај када су утицајне величине x_i у потпуности корелисане има облик аналоган изразу (11),

$$u_y = \left|\sum \frac{\partial y}{\partial x_i} u_{x_i}\right| \qquad (12)$$

При томе треба имати у виду да несигурности и грешке (случајне или систематске) представљају различите величине. Док грешке у изразу (11) могу бити различитог знака, дотле несигурност u_y као и

[7] ФТМ, члан 1.7.

[8] ФТМ, члан 1.7

несигурности утицајних величина u_{x_i} увек су позитивне величине.

У статистичкој теорији уводи се *коефицијент корелације*[9] $r(x_1, x_2)$, као бездимензиона величину чија се вредност налази у интервалу $-1 \le r \le 1$. Коефицијент r изражава статистичку међузависност случајних величина x_1 и x_2. Максимална вредност $|r(x_1, x_2)| = 1$ постоји у случају када су величине повезане математичким изразом типа $x_1 = ax_2 + b$, (a и b су познате константе), тј. када су величине у потпуности одређене једна другом. Супротни случај представљају величине које су међусобно потпуно статистички независне, када је коефицијент корелације близак нули $r(x_1, x_2) \approx 0.$ Примери у којима коефицијент корелације има горе споменуте екстремне вредности дати су у члану 5.3.

Међутим, у пракси постоје случајеви када корелација није занемарљиво мала, али такође ни врло висока, $0 < |r(x_i, x_j| < 1$. Овде се, ради једноставности, наводи израз за комбиновану МН у случају величине која зависи само од **две** утицајне променљиве $y = f(x_1, x_2)$. Нека утицајне величине x_1 и x_2, имају имају коефицијент корелације $r(x_1, x_2)$ и несигурности тип Б u_{x_1} и u_{x_2}. Комбинована МН величине $y = f(x_1, x_2)$ у том случају гласи

$$u_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 u_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 u_{x_2}^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} u_{x_1} u_{x_2} \cdot r(x_1, x_2)} \quad (13)$$

.

Види се да израз (13) обухвата у себи формуле (10) и (12). У случају некорелисаних величина, $r(x_1, x_2) = 0$, (13) прелази у (10), док код потпуне корелације, $|r(x_1, x_2| = 1$, из (13) се добија (12). Вредност коефицијента корелације одређује се, по правилу помоћу, у ту сврху, изведеног експеримента.

5.3 ПРИМЕРИ ОДРЕЂИВАЊА КОМБИНОВАНЕ МН

<u>Пример</u> 1, комбинована МН на основу МН тип А и МН тип Б.

Применом волтметра високе резолуције, у устаљеном режиму неког електричног кола више пута је поновљено мерење разлике потенцијала. На основу добијеног узорка разултата одређена је средња вредност $V_s = 1{,}003210\ \text{V}$ и стандардно одступање средње вредности s_{V_s} = 6 μV. У каталогу произвођача даје се податак да инструмент на том опсегу има максимално одступање ΔV_m = 28 μV. Искуство у раду са овим инструментом показује да **постоји одређено груписање резултата око средње вредности**. Одредити стандардну и проширену комбиновану МН.

<u>*Решење*</u>

Стандардна МН тип А средње вредности једнака је стандардном одступању $u_\text{A} = s_{x_s} = 6\ \mu\text{V}$, в.члан 3.1. Стандардна МН тип Б добија се из податка о максималном одступању уз усвајање одговарајуће функције расподеле. Из услова задатка се закључује да за МН тип Б постоје разлози за усвајање троугаоне расподеле са полуширином $a = 28\ \mu\text{V}$. (Могло би бити такође речи о усвајању Гаусове расподеле). Стандардна МН тип Б за троугаону расподелу износи $u_\text{B} = s_\text{t} = a/\sqrt{6} = 11{,}4\ \mu\text{V}$, израз (7). У овом примеру оправдано је занемаривање МН услед дигиталног очитавања резултата јер одговарајућа проширена несигурност износи $0{,}5\ \mu\text{V}$ а стандардна несигурност $0{,}29\ \mu\text{V}$, видети члан 4.4.1.

Несигурности тип А и Б увек представљају **некорелисане величине,** јер се одређују потпуно различитим поступцима. Отуда се стандардна комбинована МН одређује изразом (10), $u_\text{cAB} = \sqrt{u_\text{A}^2 + u_\text{B}^2} = 13\ \mu\text{V}$. Проширена комбинована МН добија се множећи u_c коефицијентом проширења k чија вредност зависи од функције расподеле. Пошто МН тип Б подлеже Гаусовој расподели, то се комбинованој МН u_cAB може придружити Гаусова или евентуално троугаона расподела. Коефицијент проширења за троугаону расподелу износи $k = 2{,}45$ а за Гаусову расподелу $(P = 99\ \%)$, $k = 2{,}58$, (в.табелу 1). Као компромисна вредност, може се усвојити $k = 2{,}5$, што је приближно средња вредност горњих коефицијената. Дакле, проширена комбинована МН, којој одговара сигурност блиска 99 %, износи $U_\text{c} = k \cdot u_\text{c} \approx 33\ \mu\text{V}$.

<u>Пример</u> 2, комбинована МН на основу некорелисаних МН тип Б.

У циљу добијања отпорника номиналне отпорности $R_e = 1000\ \Omega$ остварена је редна веза десет отпорника номиналне отпорности $R = 100\ \Omega$. Проширена несигурност (максимално одступање) сваког од отпорника износи $U_\text{R} = 0{,}1\ \Omega$. Отпорници потичу од различитих произвођача. Одредити проширену несигурност еквивалентне отпорности U_{R_e}.

<u>*Решење*</u>

Проширеној МН појединих отпорника придружује се равномерна расподела, па се за стандардну МН добија $u_\text{R} = U_\text{R}/\sqrt{3} = 0{,}058\ \Omega$. Еквивалентна отпорност износи $R_e = \sum R_i$, одакле

[9] Видети на пример ФТМ , члан 1.16.1.

следи $\frac{\partial R_e}{\partial R_i} = 1$. Према услову задатка, поједине отпорности R_i калибрисане су различитом опремом, па се могу сматрати некорелисаним величинама, $r(R_i, R_j) \approx 0$. Применом (10) добија се $u_{R_e} = u_R \sqrt{10} = 0{,}18\ \Omega$. Еквивалентна отпорност R_e, као збир већег броја случајних величина, испуњава услове централне граничне теореме, па има приближно Гаусову расподелу. Усвајајући коефицијент проширења $k = 2{,}58$, $(P = 99\ \%)$, проширена МН еквивалентне отпорности износи $U_{R_e} = k \cdot u_{R_e} = 0{,}46\ \Omega$, тј. $R_e = (1000 \pm 0{,}46)\ \Omega$.

***Пример** 3, комбинована МН на основу корелисаних МН тип Б.*

Кондензатор номиналне капацитивности $C_e = 500\ \text{nF}$ добијен је паралелном везом пет кондензатора номиналне капацитивности $C = 100\ \text{nF}$. Проширена несигурност (максимално одступање) сваке од капацитивности износи $U_C = 0{,}1\ \text{nF}$. Све капацитивности су одређене истом опремом и помоћу истог еталонског кондензатора. Одредити несигурност еквивалентне капацитивности U_{C_e}.

Решење

Еквивалентна капацитивност паралелне везе кондензатора је $C_e = \sum C_i$. Све капацитивности одређене су истоветном методом и опремом па се могу сматрати потпуно корелисаним, $r(C_i, C_j) \approx 1$. Применом (12) добија $u_{C_e} = 5u_C$. У овом случају еквивалентна капацитивност C_e, као збир корелисаних вредности, **не испуњава** услове централне граничне теореме. Отуда је расподела C_e униформна као и појединих капацитивности. Проширена МН износи $U_{C_e} = 5U_C = 0{,}5\ \text{nF}$, па је $C_e = (500 \pm 0{,}5)\ \text{nF}$.

***Пример** 4, комбинована МН такође на основу корелисаних МН тип Б.*

На сл.4 приказана је типична лабораторијска шема за мерење отпорности платинског отпорног термометра $R(t)$. Као еталон користи се отпорник R_n чија је отпорност претходно одређена у калибрационој лабораторији са високом тачношћу, $u_{R_n} / R_n \approx 0$. Отпорност $R(t)$ се одређује мерењем два пада напона, и то на термометру, $V(t) = R(t)I$, а затим на еталонском отпорнику $V_n = R_n I$. При томе се претпоставља да електронски волтметар има улазну отпорност која је далеко већа од отпорности отпорника и свих жичаних веза. За време трајања експеримента струја I може се сматрати константном. Одредити МН отпорности $R(t)$.

Решење

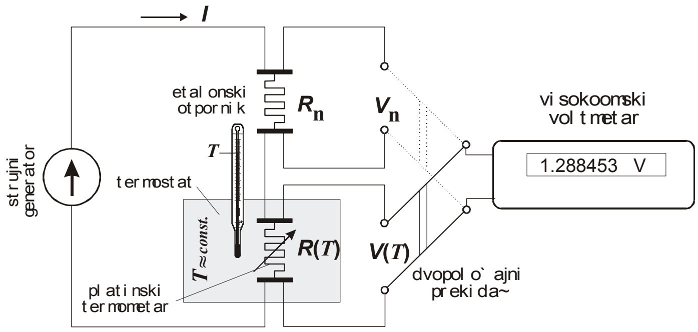
Отпорност платинског термометра одређује се на основу мерења два напона $V_n = R_n I$ и $V(t) = R(t)I$, на основу којих се добија израз $R(t) = R_n V(t) / V_n$. Према услову задатка, МН отпорности R_n може се занемарити. Падови напона V_n и $V(t)$ су добро корелисане величине, $r(V(t), V_n) \approx 1$, јер се мерење врши истим инструментом на истом напонском опсегу и у кратком временском интервалу. Заменом $\frac{\partial R(t)}{\partial V(t)} = R_n / V_n$ и $\frac{\partial R(t)}{\partial V_n} = -R_n V(t) / V_n^2$ у (12) добија се

$$u_{R(t)} = R_n \left| \frac{1}{V_n} u_{V(t)} - \frac{V(t)}{V_n^2} u_{V_n} \right|. \qquad (14)$$

Дељењем (14) са $R(t)$ добија се релативна МН отпорности термометра

$$\frac{u_{R(t)}}{R(t)} = \left| \frac{u_{V(t)}}{V(t)} - \frac{u_{V_n}}{V_n} \right| \qquad (15)$$

У циљу добијања што мање несигурности, потребно је да напони имају блиске вредности, што се постиже ако су отпорности R_n и $R(t)$ приближно једнаке. У том случају МН оба напона су једнаке $u_{V(t)} = u_{V_n} = u_V$ па је десна страна израза (15) блиска је нули. Одатле се могу написати неједнакости $\frac{u_{R(t)}}{R(t)} << \frac{u_{V(t)}}{V(t)}$ и $\frac{u_{R(t)}}{R(t)} << \frac{u_{V_n}}{V_n}$ које показују да је несигурност мерења отпорности је **знатно мања** од несигурности мерења напона.



Сл.4 Шема веза за одређивање отпорности $R(t)$ платинског отпорног термомета.

***Пример 5** Комбинована МН на основу корелисаних и некорилисаних МН тип Б.*

Решити задатак из претходног примера 4 уз претпоставку да отпорник R_n има МН u_{R_n} која се **не може** занемарити

Решење

Отпорност R_n је одређена неким претходним мерењима па је њена вредност некорелисана у односу на напоне $V(t)$ и V_n, (који су пак међусобно потпуно корелисани). Полазећи од израза $R(t) = R_n V(t) / V_n$, применом израза (10) и резултата из претходног примера, добија се

$$\frac{u_{R(t)}}{R(t)} = \sqrt{\left(\frac{u_{R_n}}{R_n}\right)^2 + \left(\frac{u_V}{V(t)} - \frac{u_V}{V_n}\right)^2} \qquad (16)$$

Ако напони $V(t)$ и V_n имају блиске вредности, други члан у изразу може се занемарити, па се добија

$$\frac{u_{R(t)}}{R(t)} \approx \frac{u_{Rn}}{R_n}. \qquad (17)$$

Из (17) следи да је МН отпорности $R(t)$, код методе приказане на сл.4, првенствено одређена несигурношћу отпорности еталонског отпорника.

6. УТИЦАЈ ДЕФИНИЦИЈЕ МЕРЕНЕ ВЕЛИЧИНЕ И МЕРНЕ МЕТОДЕ НА УКУПНУ МЕРНУ НЕСИГУРНОСТ

Предуслов успешног остваривања било ког техничког задатка је претходно прецизирање свих детаља који имају утицај на исход резултата. Овај принцип у пуној мери важи и за мерења. Уколико је захтевана тачност већа, утолико је потребно више података који описују саму величину која се мери, затим мерну методу а такође и све утицаје окружења који утичу на резултат. И обрнуто, ако се не тражи висока тачност, мерење се може обавити било којим приручним мерилом.

Као пример у коме је захтева релативно мала тачност, може се узети мерење отпорности отпорника који се примењују у неким електронским колима. За многе отпорнике типична толеранција се креће од 1% до 5% у односу на номиналну вредност. Пошто ова захтевана тачност није велика, отпорност се може мерити било којим уобичајеним омметром.

Супротни пример представљало би мерење отпорности еталонских отпорника, када се захтева висока тачност, са релативном несигурношћу од око 10^{-6} или бољом. У овом случају, неопходно је пре мерења прецизирати многе детаље у вези са отпорником, затим одабрати погодну мерну методу и одредити услове које мора да испуни експериментална опрема и параметри окружења. Ово је илустровано следећим примером.

Подаци о отпорнику

- Номинална отпорност $100\,\Omega$.
- Отпорник је жичани, од легуре манганин, са два пара прикључних крајева.
- Отпорник се налази у уљном купатилу (термостату) чија температура износи око $23\,^{\circ}\mathrm{C}$.
- Стабилност температуре термостата $\pm 0{,}05\,^{\circ}\mathrm{C}$.
- Највећа дозвољена дисипација отпорника 10 mW.

Подаци о методи мерења и опреми

- Мерење се врши компараторским мостом.
- Еталонски отпорник има отпорност одређену са релативном несигурношћу од $1 \cdot 10^{-7}$.
- Температура спољашњег амбијента $(23 \pm 1)^{\circ}\mathrm{C}$.
- Релативна влажност ваздуха $< 60\%$.

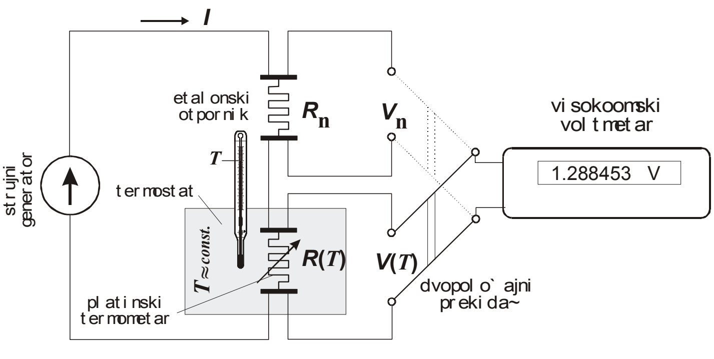
и др.

Ако се захтева још мања мерна несигурност (боља тачност), неопходно је узети у обзир и оне додатне величине чији се утицај по правилу занемарује у уобичајеној пракси. У горњем примеру то би биле, на пример, загревање отпорне жице под утицајем струје мерног кола, паразитне термоелектромоторне силе, и др. Овакве величине, по правилу, није могућно тачно одредити. Међутим, пожељно је ипак извршити анализу којом се процењује квантитативни утицаја паразитних ефеката на укупну мерну несигурност.

Као пример у коме се узима у обзир већи број паразитних систематских утицаја приказано је мерно коло као у случају примера 4 у члану 5.3.3. Ако се захтева повећана тачност него у том примеру, потребно је узети у обзир и додатне величине које могу да утичу на мерну несигурност, сл.5. У овом случају узете су у обзир следеће величине и појаве.

- Улазна отпорност волтметра, R_V.
- Отпорности прикључних проводника, R_1, R_2, R_3, R_4.
- Временска нестабилност струје, $I(t)$.
- Временске варијације температуре температуре термостата $T(t)$ и одговарајуће промене отпорности платинског отпорника $R(T,t)$.
- Мерна несигурност калибрационог термометра, u_T.

По потреби могу бити узете у обзир и друге величине (на пример, нехомогеност температурског поља у



Сл.5 Систем са сл.4, где су узете у обзир додатне величине које имају утицај на несигурност мерења.

околини платинског термометра, шентирајуће паралене отпорности проводника и др).

Нека мерења су изузетно значајна у физици или техничкој пракси, при чему се као пример могу навести следећа.

- Одређивање нове вредности неке фундаменталне физичке константе, на пример елементарног наелектрисања, Авогадровог броја, масе елементарних честица и др.
- Мерење механичких, термичких или електричних параметра материјала, (модула еластичности, брзине простирања звука, температуре фазних прелаза, топлотне проводности, брзине простирања звука, диелектричне константе, магнетске пермеабилности итд).

Мерења општег значаја се, када је то могућно, обављају помоћу две или више алтернативних метода. Исти систематски ефекти се код различитих мерних метода, по правилу, различито одражавају на крајњи резултат. Поређења резултата мерења истих величина, остварена разним методама, дају корисна сазнања у правцу тачније процене укупне несигурности.

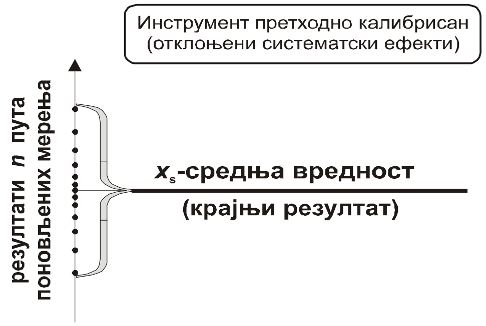
Мерења фундаменталног значаја обављају се истовремено у водећим метролошким институцијама. Добијени резултати се презентирају и међусобно упоређују на тзв. *међународним интеркомпарацијама*. Резултати појединих институција, по правилу се разликују и по средњој вредности и по мерној несигурности. На основу резултата, одређује се, односно усваја, заједничка средња вредност мерене величине и одговарајућа мерна несигурност. При томе највећи утицај на усвојену вредност имају резултати са најмањом мерном несигурношћу.

6. ЗАВРШНА РАЗМАТРАЊА

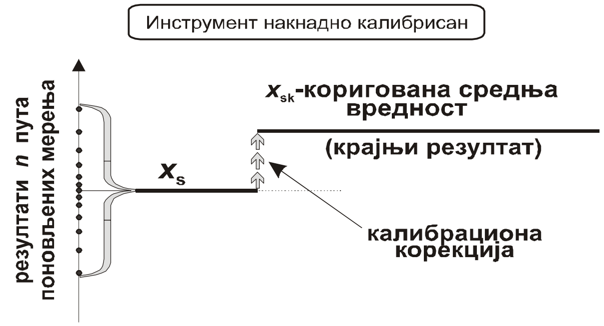
У табели 3 наведено је више врста мерења која се принципијелно разликују у погледу одређивања мерне несигурности. У врсти I табеле 3 дат је пример једног мерног податка x_1 за који не постоје подаци ни о мерилу ни о начину на који је добијен. Самим тим овај податак нема метролошку вредност, већ даје само оријентациони податак о мереној величини.

Табела 3 Несигурност неких типова мерења

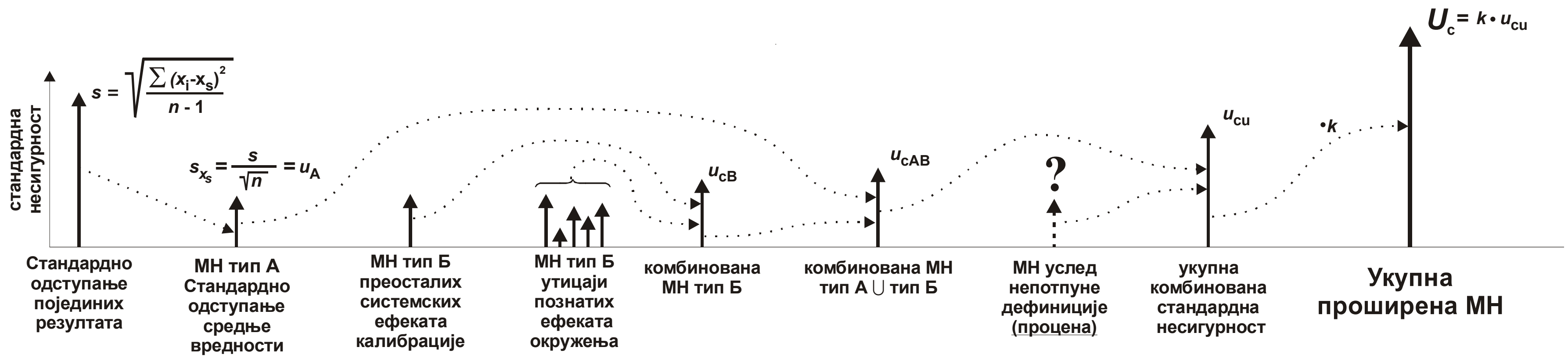
	Број понов-љених мерења	Подаци за израчу-навање МН	Стандардна несигурност	Резултат	Расподела	Значај Мерења
I	1	Подаци не постоје	Непозната	x_1	Непозната	Мали
II	n, n>>1 (сл.6, а и б)	Статистичка обрада података	Тип А $u_A = s/\sqrt{n}$	$x_s \pm k \cdot u_A$	Гаусова	Ограничен (бољи него I)
III	1	Познат један систематски утицај	Тип Б u_B	$x_s \pm k \cdot u_B$	Зависна од природе величине(а) која ствара систематски утицај	Ограничен (бољи него I)
IV	1	Сви битни систематски утицаји	Комбинована Тип Б u_{CB}	$x_s \pm k \cdot u_{CB}$		Добар (бољи него II и III)
V	n	Статистичка обрада и сви битни системат-ски утицаји	Комбинована Тип А ∪ Тип Б u_{CAB}	$x_s \pm k \cdot u_{CAB}$	Једна од сконцентри-саних расподела (Гаусова, троугаона или Студен-това)	Велик
VI	n (сл. 6 в)	Статистичка обрада, сви битни систем. утицаји и процена осталих системат. утицаја	Комбинована Тип А ∪ Тип Б u_{CU}	$x_s \pm k \cdot u_{CU}$		Максимално могућан са датом методом и опремом



а)



б)



Напомена: приказане несигурности нису приказане у сразмери.

в)

Слика 6 а) Резултат при поновљеним мерењима претходно калибрисаним инструментом; б) резултат при поновљеним мерењима накнадно калибрисаним инструментом; в) ток одређивања укупне мерне несигурности у случају приказаном врстом VI, у табели 3.

Врста II односи се на узорак резултата добијених поновљеним мерењима неке величине. При томе се такође нема података о коришћеној мерној опреми. Ови резултати имају већи значај од појединачног резултата. Статистичким путем, помоћу њих, одређује се средња вредност и МН тип А, сл.6 а, (видети члан 3.1). Ако се после статистичке обраде резултата, изврши накнадна калибрација инструмента и добије податак о систематској грешци, тада се врши корекција средње вредности, сл.6 б. У врсти III табеле 3, приказан је случај појединачног мерења који се често среће у пракси, где се располаже једним податком који битно одређује МН тип Б. Овај случај описан је у примерима 1 и 2 у члану 4.

У врсти IV ради се о појединачном мерењу при чему се познаје више узрока који систематски утичу на несигурност мерења (комбинована МН тип Б). Начин добијања комбиноване МН зависи од међусобне корелације систематских ефеката, видети члан 5 и примере из члана 5.3.

Врста V се односи на резултате поновљених мерења, при чему су проучени сви битни систематски ефекти који утичу на несигурност. У овом случају одређује се прво МН тип А, затим комбинована МН систематских ефеката (тип Б) и на крају укупна комбинована МН (Тип А и Тип Б). При томе се МН Тип А и Тип Б сматрају међусобно некорелисаним, видети пример 1 у члану 5.3. Мерења у врсти V односе се на лабораторијска мерења већег значаја.

Врста VI у табели 3 односи се на случај мерења **највеће могуће тачности** са датом инструментацијом (видети члан 6). У обзир су узети сви систематски ефекти као и у врсти V. Осим тога, извршена је и процена несигурности услед ефеката нижег реда, који утичу на дефиницију мерене величине. Графички приказ тока одређивања укупне комбиноване несигурности (стандардне и проширене) приказан је на сл. 6 б. Овај дијаграм такође садржи такође и ток одређивања несигурности за случајеве у врстама II, III, IV и V, с тим што код њих постоји мањи број компонената несигурности

ЛИТЕРАТУРА

Guide to Expression of Uncertainty i Measurement, BIPM, IEC, IFC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, Geneva 1993.

Д.Станковић, *Физичко техничка мерења,* Универзитет у Београду, 1997.

B.Taylor, C.Kuyatt *Guidelines of Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results,* NIST Technical Note 1297, Gaithersburg, 1994 Edition.

K.Sommer, M.Kochsiek, “Role of Measurement Uncertainty in Deciding Conformance in Legal Metrology,OIML Bulletin Vol.XLII, Number 2, April 2002.

“Expression of Uncertainty of Measurement in Calibration”, EAL-R2, Edition 1, 1997.

Abstract

The aim of this contribution is to present in a short and concise manner the essence of the book Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements that is today the international reference in the field of the Uncertainty of obtained experimental results. The majority of readers have not the necessary knowledge of random processes and basic error theory that is indispensable for practical use of the mentioned book. This contribution has to be the basis for future use as one of the textbook chapters for the undergraduate study. That is the reason why many rigid mathematical proofs are omitted. Many examples taken from the different subjects in electrical engineering have been supplied to make the better and easier understanding of the essence of related field.